DERIVATÍV PÉNZÜGYI TERMÉKEK ÁRDINAMIKÁJA ÉS AZ ÚJ TÍPUSÚ KAMATLÁBMODELLEK[1]

KIRÁLY JÚLIA – SZÁZ JÁNOS

Ennek a cikknek az a célja, hogy áttekintést adjon annak a folyamatnak néhány főbb állomásáról, amit Black, Scholes és Merton opcióárazásról írt cikkei indítottak el a 70-es évek elején, és ami egyszerre forradalmasította a fejlett nyugati pénzügyi piacokat és a pénzügyi elméletet. A hazai tőkepiacra ugyanakkor mindez csak halovány hatást gyakorolt, és szinte teljesen érintetlenül hagyta a hazai közgazdász társadalmat.[2] Az itthoni közöny politikai okokkal még magyarázható az elmúlt 30 év első felére vonatkozóan, az utolsó 15 év érdektelenségét inkább azzal próbálhatjuk magyarázni, hogy e terület meglehetősen matematikaigényes, és a hazai matematikai közgazdaságtan művelőinek figyelmét elsődlegesen az általános egyensúlyelmélet, a játékelmélet, az operációkutatás köti le. Az opcióárazási problémából kinövő irodalom homlokterében a rövid távú pénzügyi *sztochasztikus dinamika* áll. Leginkább a hazai ökonométer társadalom figyelmét ragadhatta volna meg mindez a módszertan közelsége folytán, de hát a hazai derivatív piacon nem sok empirikus elemeznivaló akad.

A releváns kérdések

A határidős és opciós ügyletek a deviza-, részvény-, hitel- és árutőzsdei ügyletek kapcsán felmerülő piaci kockázat kezelésére alkalmasak, mivel az alapügyletek kockázatait tükrözik vissza valamilyen transzformált formában. Az azonnali (részvény, vagy deviza) árfolyamban megjelenő kockázat legegyszerűbb tükröződése a határidős árfolyam, mivel ez elvben csupán az árfolyamnak a lejárati időpontra felkamatoztatott értéke. A vételi és eladási opciók árazása veti fel annak a kérdését, hogy mi a valószínűsége az opció

[1] Beérkezett: 2005. május 11. A cikk az OTKA T 047193 kutatási projekt keretében készült.

[2] A megjelent hazai derivatív témájú írások, értekezések zöme inkább matematikusoktól, fizikusoktól és az egyetemet nemrég befejezett ifjú közgazdászoktól származik. Itt most megpróbálunk egy tömör illusztrációt adni e területről. Mivel e témakörnek csak a szakkönyvei több olvasótermet töltenének meg, így csak a főbb fogalmakra, módszerekre, kiválasztott termékekre koncentrálunk. Az általunk felkínált sajtban több a luk mint a sajt, de hisszük, hogy az íze hiteles. E terület áttekintése nélkül erősen hiányos lenne e pénzügyekkel foglalkozó különszám. A felhasznált matematikai fogalmakat és tételeket (Wiener-folyamat, Ohrstein-Uhlenbeck-folyamat, Ito-lemma, martingál reprezentációs tétel, Girszanov-tétel, Kolmogorov-egyenletek stb.) nem ismertetjük, hasonlóképpen mellőzzük a szükséges pénzügyi alapfogalmak ismertetését (arbitrázs, hedge, call és put opció, forward, futures, swap ügyletek). Ezekről ld.: Medvegyev, Michaletzky, Varga, Száz, Hull, Baxter-Rennie, Elliott-Kopp könyveket.

lehívásának, tehát mi a jövőbeni árfolyam eloszlása, ehhez pedig tudni kell, hogy milyen folyamatot követ az árfolyam alakulása. Az opciók árazásának problémája pillanatok alatt vezetett általában a származtatott kockázatú termékek árazásának a vizsgálatához. Széles körben alkalmazott fogalom lett a dinamikus replikálás, az *arbitrázsárazás.*

Magyarországon most és a belátható jövőben a derivatív pénzügyi termékek árazásának elmélete és módszertana meggyőződésünk szerint nem a részvény portfóliók kockázatának kezelése, hanem a különböző futamidejű kamatlábak véletlen változásai mögött meghúzódó szükségszerű összefüggések jellegének megértése miatt fontos. Ez utóbbi kérdésfelvetés és szemlélet tökéletesen hiányzik a mai magyar közgazdasági gondolkodásból.

Ha a kötvényárazás problémáját egy kamatláb derivatív termék árazásaként közelítjük meg, akkor az ebből adódó legfontosabb felhasználható eredmény a *Heath-Jarrow-Morton* (HJM) tétel, amelyet a cikk második felében ismertetünk, és azt mondja ki, hogy *a kamatlábak változásának kockázatsemleges valószínűségek melletti trendjét egyértelműen meghatározza a kamatlábak volatilitásának lejárati szerkezete.*

Az itt vázlatosan ismertetésre kerülő, a derivatív termékek árazásának elméletére épülő kamatláb modellek azt számszerűsítik, hogy a rövid lejáratú kamatláb véletlen ingadozásaiból összetevődő lehetséges jövőbeli pályái miként határozzák meg a hozamgörbe alakját, azaz a különböző futamidejű kamatlábak egymáshoz való viszonyát. Megfordítva: adott feltételek mellett a hozamgörbe alakja tartalmazza azokat az információkat, hogy a rövid lejáratú kamatláb a jövőben milyen pályákat futhat be és milyen kockázatsemleges valószínűséggel.

A cikkben felváltva használjuk a folytonos és a diszkrét megközelítést, utóbbit hol az előző numerikus módszereként, hol önálló modell-családként.

Egy származtatott termék árazása két dologtól függ:

– mi a származtatott termék konstrukciója,

– milyen árfolyam-alakulási folyamatot követ az alaptermék.

Először a mindkét szempontból legegyszerűbb modellt mutatjuk be, ez a részvény opció árazás *Black-Scholes modellje.* Az összetettebb termékkonstrukciókra az *egzotikus opciókat* hozhatjuk példaként, az alaptermék áralakulása kapcsán a sztenderd diffúziós folyamat feltételezése után az *átlaghoz visszahúzó folyamatot* vizsgáljuk. Az árfolyam-alakulás mint diffúziós folyamat azt jelenti, hogy a piaci hatékonyság hipotézisének szellemében úgy tekintjük az árfolyam-alakulást, hogy az árfolyamokat véletlenszerűen felle lökdösik a folyamatosan megjelenő új információk — a Brown-mozgást végző részecskék mozgásának analógiájára. Amiként biztosan tudjuk, hogy egy adott részecske most hol van, de csak bizonyos valószínűséggel állíthatjuk, hogy itt vagy ott lesz a jövőben, a részvény vagy devizaárfolyamról is most bizonyosan tudjuk, hogy mennyi az értéke, azonban a jövőbeli nagyságára vonatkozó valószínűség-eloszlást megadó sűrűség függvény ahhoz hasonlóan terül szét időben, amiként az egyetlen pontjában felhevített vasrúdban terül szét a hő. A cikk középső részében taglaljuk azokat a fizikai, illetve pénzügyi parciális differenciálegyenleteket (PDE), amelyek leírják a folyamatokat és alátámasztják, hogy azonos valószínűség számítási apparátus írja le őket (Kolmogorov-egyenletek).

A cikk keretében csak azokat a modelleket vázoljuk fel, amelyek a hozamok *normális* eloszlásán épülnek fel. A gyakorlatban is kimutatható a Gauss-eloszláshoz képesti *vastag-szél jelenség*, azonban ez a jelenség és az extrém hozamok erőteljesebb együttmozgása már külön cikk témái.

A hozamgörbe modellekben lényeges eltérés van az egy, illetve több kockázati faktoros modellek következtetései között. Az *egyfaktoros kamatlábmodellekben* a hozamgörbe pontjai mindig azonos irányba tolódnak el az új információ hatására (bár eltérő mértékben). A gyakorlati alkalmazásokhoz szükséges további kockázati faktorok figyelembevétele. Az amerikai államkötvények árfolyam adatai alapján főkomponens elemzéssel olyan 3 faktort szoktak beazonosítani, amelyben az első faktor a hozamgörbe szintjére, a második a meredekségére, a harmadik az alakváltoztatásaira (csavarodására) hat.

Mi a *többfaktoros* opcióárazási modellekre (egyben az egzotikus opciókra) a *csereopciót* (exchange option) hozzuk példaként, amely egyfajta általánosítása a sima call opciónak.

Az opcióárazás állította reflektorfénybe a *dinamikus replikáláson* alapuló arbitrázsárazást, ami elviekben különbözik a közgazdászok által széles körben használt kereslet-kínálat elemzéstől, mivel a relatív árak konzisztenciáját vizsgálja. A piacok teljessége *(complete markets)* alcím alatt tárgyaljuk az arra vonatkozó vizsgálatok eredményeit, hogy miként függ össze az egyes termékek más termékekből való folyamatos kikombinálhatósága az árak összhangjával, és mindez a valószínűségszámítás nyelvére való átfordíthatósággal (a martingálok létezése és egyértelműsége). A *sztochasztikus reprezentáció* jól példázza, hogy amit a modern pénzügy tankönyvek speciális pénzügyi problémaként tárgyalnak, azok a fizikusok által régen kidolgozott összefüggések *(Feynman-Kac formula).*

Az opciók és számos más bonyolult pénzügyi termék ára explicit módon függ az alaptermék volatilitásától, ezáltal lehetővé válik piaci adásvételek formájában olyan elvont nagyságokra vonatkozó fogadások kötése, mint a jövőbeni bizonytalanság mértéke *(volatility trading)*, vagy különböző árfolyamok közötti korreláció nagyságának változása *(trading correlation).*

A Black-Scholes modell

A Black–Scholes–Merton modellben 3-féle termék van:

– egy kockázatmentes,
– egy kockázatos és
– egy származtatott kockázatú termék

(pl. bankbetét + részvény + európai vételi jog). Kérdés, mi a harmadik termék ára, ha ismerjük az első két termék árfolyam-alakulását. Feltesszük, hogy a betét és a részvény (alaptermék) kumulált loghozama a $[0,t]$ időszakra:

$$Y_B(t) = rt \qquad Y(t) = N(\alpha t, \sigma^2 t) \ , \tag{1}$$

ahol t folytonos változó a $[0,T]$ időszakban, r, α, σ konstans, és a részvény kumulált loghozama minden időpontra normális eloszlású.[3] A kumulált loghozam definíciója alapján a betét értékének alakulása konstans kamatláb mellett, ill. a részvény árfolyama konstans drift és volatilitás mellett:

$$B(t) = B(0)e^{Y_B(t)} \qquad S(t) = S(0)e^{Y(t)} \ , \tag{2}$$

azaz a betét egy exponenciális függvény mentén alakul, a részvény árfolyam eloszlása minden időpontban lognormális. Nézzük a származtatott termékek azon körét, amelyeket teljes mértékben meghatároz a T időpontbeli értékük, mivel a $[0,T]$ időszakban nem involválnak pénzmozgást (T-termékek).[4] Jelölje $g(t)$ a származtatott termék t időpontbeli értékét. A forward pozíciót ill. az európai vételi jogot definiáló képletek:

$$g(T) = S(T) - K \qquad g(T) = \max\{\,0, S(T) - K\,\} \tag{3}$$

ahol K a forward árfolyam ill. az opció lehívási árfolyama.

Adott tehát a $B(t)$ és $S(t)$ $(0 \le t \le T)$ és a $g(T)$. Kérdés, mennyi a $g(t)$ értéke $(t < T)$, kiemelten: *mennyi a $g(0)$ értéke?* A legelegánsabb választ erre a kérdésre Merton adta 1974-ben az Ito-lemma felhasználásával.[5] A részvény kumulált loghozama az (1) képletben egy Ito-folyamat, amely SDE alakban felírva:

$$dY(t) = d\ln S(t) = \alpha dt + \sigma dW(t) \ , \tag{4}$$

ahol $dW(t)$ a $W(t)$ Wiener-folyamat növekménye.[6] Az árfolyam a kumulált loghozam Ito transzformáltja:

$$dS(t) = \mu S dt + \sigma S dW(t) \qquad \mu = \alpha + \frac{\sigma^2}{2} \ . \tag{5}$$

A származtatott termék árfolyam-alakulása az alaptermék árfolyam-alakulásának Ito transzformáltja:

$$dg(S,t) = \left(g_t + g_S \mu S + \frac{1}{2} g_{SS} \sigma^2 S^2 \right) dt + g_S \sigma S dW \ , \tag{6}$$

ahol az indexek a parciális deriváltakat jelölik.[7] A (6) egyenletből kivonva az (5) g_S-szeresét, eltűnik a kockázatot reprezentáló dW-s tag. Ez ekvivalens azzal, hogy kiírunk 1 darab derivatív terméket és veszünk g_S darab

[3] Alternatív megfogalmazásban: minden Δt hosszú periódusban a loghozamok független normális eloszlású valószínűségi változók konstans paraméterekkel.

[4] Ilyen például a forward pozíció, vagy az európai opciók, de nem ilyen a futures pozíció a napi elszámolás miatt, vagy az amerikai típusú opciók a T időpont előtti lehívhatóság miatt.

[5] 1994-ben kapott Nobel-díjat ezen úttörő munkásságáért.

[6] Legalapvetőbb sajátossága, hogy $[dW]^2 = dt$.

[7] A pénzügyes szakzsargonban a g_S neve delta, a g_{SS} a gamma, a g_t a theta.

alapterméket. Ennek a portfóliónak az értéke: $V = -g + g_S S$. E portfólió értékváltozása:

$$dV = -dg + g_S dS = -\left(g_t + \frac{1}{2} g_{SS} \sigma^2 S^2\right) dt \, . \tag{7}$$

Mivel a portfólió kockázatmentes, ezért a dt időszakra a kockázatmentes kamatláb az elvárható hozam.

$$dV = -\left(g_t + \frac{1}{2} g_{SS} \sigma^2 S^2\right) dt = V r dt = (-g + g_S S)\, r dt \, . \tag{8}$$

A dt kiesik és a derivatív termékek árazásának alapegyenletét, a *Black-Scholes egyenletet* (BS) kapjuk:

$$g_t = rg - rSg_S - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 g_{SS} \, . \tag{9}$$

A Black-Scholes (BS) egyenlet megoldása a $g(T) = \max(0, S_T - K)$ lejáratkori peremfeltétel mellett a Black-Scholes képlet, ami a K lehívási árfolyamú vételi jog értékét adja meg:

$$c = SN(d_1) - PKN(d_2) \, , \tag{10}$$

ahol

$$d_1 = \frac{\ln[S/(PK)]}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \, , \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \, , \qquad P = e^{-rT} \, .$$

A (10)-es formula zárt képlettel adja meg a BS egyenlet megoldását, ami ritkaság, és a call opciót megadó speciális peremfeltételnek köszönhető. A (9) PDE egyenletet a folytonosság és a normalitás feltételezésével kaptuk, azonban többnyire nincs zárt képlettel megadható megoldása a BS parciális differenciálegyenletnek. A numerikus megoldásra bevett gyakorlat a *véges differenciák* módszerének alkalmazása. Bevezetve a szokásos $x = \ln S$ jelölést, a BS egyenlet:

$$g_t = rg - vg_x - \frac{1}{2}\sigma^2 g_{xx} \, , \tag{11}$$

ahol $v = r - 0.5\sigma^2$. Ennek a diszkretizált változata a forward differenciákkal felírva (*explicit véges differenciák* módszere):

$$\begin{gathered} \frac{g_{i+1,j} - g_{ij}}{\Delta t} = \\ = rg_{ij} - v\frac{g_{i+1,j+1} - g_{i+1,j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{g_{i+1,j+1} - 2g_{i+1,j} + g_{i+1,j-1}}{\Delta x^2} \, , \end{gathered} \tag{12}$$

ahol g_{ij} a származtatott termék $i\Delta t$ időpontbeli és $e^{j\Delta x}$ árfolyamhoz tartozó értéke. Átrendezve:

$$g_{ij} = \frac{1}{1 + r\Delta t}\left(p_u g_{i+1,j+1} + p_m g_{i+1,j} + p_d g_{i+1,j-1}\right) \, , \tag{13}$$

ahol

$$p_u = \frac{1}{2}\Delta t \left(\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} + \frac{v}{\Delta x} \right), \quad p_m = 1 - \Delta t \frac{\sigma^2}{\Delta x^2}, \quad p_d = \frac{1}{2}\Delta t \left(\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} - \frac{v}{\Delta x} \right). \tag{14}$$

Célszerű választás[8] a $\Delta x = \sigma\sqrt{3\Delta t}$, ekkor a (14) alakja:

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{v\Delta t}{\Delta x}, \qquad p_m = \frac{2}{3}, \qquad p_d = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{v\Delta t}{\Delta x}. \tag{14b}$$

A (13) képletből látható, hogy a számolás folyamata időben visszafelé halad. Az (i, j) pontok egy téglalap rácspontjai, ahol a g_{ij} téglalap jobb oldalát a derivatív termék lejáratkori értékei határozzák meg, az alsó és felső élek értékeit külön kell megadni.[9]

A központi szerepet játszó (9) egyenlet levezetése azon alapult, hogy az alaptermék és származtatott termék árfolyam-alakulása ugyanazt a Wiener-folyamatot tükrözi. Az (5)-(6) SDE-k a bemutatott módon (pénzügyes zsargonban: dinamikus delta hedge révén) a (9) PDE-vé alakíthatók. Ennek explicit vagy numerikus megoldása adja a derivatív termék keresett értékét. A kockázat folytonos kiküszöbölése azt jelenti, hogy a két kockázatos termék arányának folytonos változtatásával szintetikusan előállítható a kockázatmentes termék. Az összefüggés átrendezhető: a származtatott kockázatú termék előállítható az alaptermék és a kockázatmentes termék segítségével. Ez a replikáló stratégia *önfinanszírozó* és *előrelátható (previsible)* folyamat.[10]

Az *önfinanszírozás* azt jelenti, hogy bár jó eséllyel minden periódus végén meg kell változtatni a replikáló portfólió összetételét, az átrendezés során nem változik a portfólió értéke: ha éppen növelni kell az alaptermék mennyiségét (adott esetben részvényt kell vásárolni), akkor ezt hitelfelvételből tesszük,[11] ha el kell adni az alaptermékből, akkor az ebből befolyó összeget hiteltörlesztésre fordítjuk, vagy betétbe helyezzük. Az előreláthatóság azt jelenti, hogy már ennek a Δt hosszú periódusnak a végén tudjuk a portfólió szükséges összetételét, annak ismerete nélkül, hogy a következő időszakban miként változik az alaptermék árfolyama. A replikálás azt jelenti, hogy a következő periódus minden lehetséges alaptermék árfolyam értékre megegyezik a származtatott termék és replikáló portfólió értéke.

---

[8] Részletesebben lásd Hull.

[9] Az alsó szél az $S(t) = 0$ értékekhez tartozó derivatív értékeket tartalmazza, a felső szél pedig egy kellően nagynak választott árfolyamszinthez tartozó értékeket. Ha nem pótolnánk ki a szélső értékeket, akkor minden lépésben elvesztenénk egy alsó és felső értéket a táblázatban, és egy balra keskenyedő háromszöget kapnánk, ami balról jobbra nézve egy trinomiális fa (ld. később). A szélső értékek pótlása egyszerű lineáris extrapoláció, ha a felület függőleges görbülete (g_{SS}) nulla. Az $S_{\max}$ kellően nagyra választásával ez többnyire könnyen elérhető.

[10] Bizonyítást ld. pl. Björk.

[11] Ha pozitiv nagyságú betétünk van, akkor ennek terhére vásárolunk.

Árfolyamfák

Az árfolyam-alakulás folyamatát nem csak a Black-Scholes egyenlet levezetése után diszkretizálhatjuk, hanem kiindulásként is. Erre szolgálnak a binomiális és trinomiális fák. Az árfolyam adott értékéből két ill. három különböző árfolyamértékhez létezik közvetlen átmenet egy Δt hosszú periódus alatt. E változások függetlenek, és úgy kell megválasztani e fák paramétereit (a változás mértékét és valószínűségét), hogy a Δt időszak alatti hozam várható értéke $\alpha\Delta t$, varianciája $\sigma^2\Delta t$ legyen.[12] Több választási lehetőség is van (2 feltétel van, és 3 ill. 4 paraméter), többféle modell használatos.[13]

Tekintsünk *egy periódust* a *binomiális modellben*. Az alaptermék árfolyama legyen S, ez vagy u-szorosára nő p valószínűséggel, vagy d-szeresére $(1-p)$ valószínűséggel $[Su, Sd]$. A két feltétel teljesül pl. az alábbi választás mellett:[14]

$$u = e^{\alpha\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}\,, \qquad \ln u = \alpha\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,, \tag{15a}$$

$$d = e^{\alpha\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}\,, \qquad \ln d = \alpha\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}\,, \tag{15b}$$

$$p = 0.5\,. \tag{15c}$$

Egy tetszőleges származtatott termék ismert lejárati (Δt időpontbeli) értékeit jelölje g_u és g_d, és a meghatározandó jelenlegi értékét pedig g. A betét értéke mindenféleképpen $G = e^{r\Delta t}$-szeresére nő. Jelölje x a szükséges részvény számot, és y a betét szükséges nagyságát, hogy előállítsuk a származtatott termék lejárati értékeit. Ennek az (x, y) összetételű portfóliónak az előállítási költsége, azaz értéke (V) lesz a származtatott termék jelenlegi értéke (g). A replikáló portfólió lejárati értékét rögzítő két egyenlet:

$$g_u = xSu + yG\,, \qquad \text{16a}$$

$$g_d = xSd + yG\,. \qquad \text{16b}$$

A két ismeretlenre megoldva:

$$x = \frac{g_u - g_d}{Su - Sd}\,, \qquad y = \frac{g_u - xSu}{G}\,. \tag{17}$$

A replikáló portfólió, ill. a származtatott termék értéke a jelenben:

$$g = V = xS + y\,. \tag{18}$$

Behelyettesítve, és felhasználva a

$$p = \frac{G-d}{u-d} \tag{19}$$

[12] A függetlenség feltételezése miatt nemcsak a várható értékek, hanem a varianciák is összeadhatóak, és mi az $N(\alpha T, \sigma^2 T)$ eloszlást akarjuk visszakapni a $\sum \Delta t = T$ időszakra vonatkozóan.

[13] Ezekről kitűnő áttekintést ad Strickland,, Clewlow (2000) 10-57. o.

[14] Ha a Δt értékét csökkentjük, akkor a kumulált loghozam az $N(\alpha T, \sigma^2 T)$ értékhez tart, ami az elemzésünk kiindulópontja.

jelölést, a derivatív keresett értéke a periódus elején:

$$g = \frac{pg_u - (1-p)g_d}{G} \,. \tag{20}$$

Így a binomiális modellben bármely származtatott termék értéke megegyezik a jövőbeni kifizetés várható értékének jelenértékével, ahol a várható értéket a kockázatsemleges valószínűséggel, a jelenértéket a kockázatmentes kamatlábbal számoljuk. A (19) képletet *kockázatsemleges valószínűségnek* nevezik, mert kielégíti a

$$pSu + (1-p)Sd = SG \tag{21}$$

egyenletet és normál esetben a $d < G < u$, így $0 < p < 1$.

A (17)-(18) egyenletek alapján az árazás menete a következő: balról jobbra haladva felírjuk az S_{ij} árfolyamok táblázatát, ennek utolsó oszlopa és a származtatott termék T időpontbeli kifizetés függvénye alapján a g_{ij} táblázat utolsó oszlopát. Ezt követően lépésről lépésre jobbról balra haladva az S és g táblázatok j-edik oszlopa alapján kiszámítjuk az x, y és g táblázatok $(j-1)$-edik oszlopát [(17)–(18)]. Ez a megközelítés megadja a származtatott termék árfolyam-alakulásának összes lehetséges pályáját és a hozzájuk tartozó (x, y) replikáló stratégiát.

A (20) képlet alapján már csak két táblázat kell, az S és a g — utóbbi most is az utolsó oszlopából kiindulva jobbról balra készül. Ha a várható érték jelenértéke szabályt (20) egy lépésben alkalmazzuk, akkor a derivatív értéke egy szorzatösszeg:

$$g = \sum_{k=0}^{n} e^{-rT} p_k g_k = e^{-rT} \sum_{k=0}^{n} p_k g_k \,, \tag{22}$$

ahol $S(n,k) = Su^k d^{n-k}$, $p(n,k) = p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, és a p_k ill. g_k arra az állapotra utalnak, hogy az árfolyam n lépés során pontosan k alkalommal ment fel.[15]

A mértékcsere, martingálok

Az előző alpont két lényeges mozzanata:

- a binomiális modellben a lépésenkénti (x, y) *replikálás* átfogalmazható a lépésenkénti várható érték számításra a számított p *valószínűség* alapján, ez pedig egy 1 lépésben történő várható érték számításra rövidíthető, és mint látni fogjuk, ezen az alapon lehet általános árazási elméletet felépíteni;

[15] Amennyiben a *trinomiális* fára felírjuk a lokális várható érték és variancia feltételt, akkor az egyik lehetséges megoldást a (14) egyenletek adják, a derivatív értékét pedig épp a (13). Ebben a kontextusban a (13) a várható érték jelenértéke —a véges differenciák esetén nem volt ilyen értelmezése—, és attól lesz kockázatsemleges értékelés, hogy $v = r - 0.5\sigma^2$ és nem $v = \alpha$.

- a (20)-as árazási képletben nem az eredeti (15c) valószínűség szerepel, ami mellett a várható hozam α, hanem a számított (19) kockázatsemleges valószínűség, ami mellett a várható hozam $r - \sigma^2/2$.

A binomiális modellnek ez a sajátossága teljes mértékben megegyezik a folytonos Wiener-folyamaton felépülő eredménnyel.

Amennyiben a (21) képletben átosztunk a G-vel (a bankbetét növekedési együtthatójával), akkor láthatjuk, hogy a kockázatsemleges valószínűség mellett a diszkontált árfolyam-alakulás martingál. A S folyamat a Q mérték szerint martingál, ha minden $j > i$-re

$$\mathbf{E}_Q(S_j \mid F_i) = S_i \ , \tag{23}$$

azaz a folyamat j időpontbeli feltételes várható értéke megegyezik a pillanatnyi értékével.

Kétféleképpen kaphatunk martingál tulajdonságú binomiális fát:

a) adott árfolyamfához keresünk olyan valószínűségeket, amelyekkel súlyozva a fa adott pontjához tartozó kimeneteket, pont a fa adott pontjának árfolyamértékét kapjuk;[16]

b) megadjuk a fa utolsó oszlopát (a T időpontbeli valószínűségi változó lehetséges értékeit), és adott átmenet-valószínűségek segítségével jobbról balról haladva konstruálunk egy *feltételes várható érték folyamatot.*

A származtatott termékek martingál árazásának lépései:

1. diszkontáljuk az alaptermék árfolyamfáját a kockázatmentes kamatlábbal,
2. megkeressük az a) módszer szerint a martingál mértéket,
3. meghatározzuk az opció lehetséges lejáratkori értékeit [az $S_T - K$ számolásnál mindkét érték jelenbeni pénzben értendő],
4. az opció lejáratkori értékeiből képezünk egy feltételes várható érték folyamatot — ennek minden eleme jelenbeni pénzben értendő, ennek a fának a csúcspontja a származtatott termék értéke.

A *binomiális reprezentációs tétel* új megvilágításba helyezi a replikáló stratégiák mibenlétét, létezését és egyértelműségét. Ez a tétel azt mondja ki, hogy ha két binomiális folyamat (X_i és Y_i) ugyanazon Q mérték szerint martingál, és mindig ugyanabba az irányba mozdulnak el (csak eltérő mértékben), akkor

$$\Delta Y_i = a_{i-1} \Delta X_i \ ,$$

ahol már az $(i-1)$-edik lépésben meghatározódik az a_{i-1} értéke, tehát nem szükséges tudni, hogy a két folyamat felfelé vagy lefelé mozdul-e el. A

[16]Feltéve, hogy a pillanatnyi árfolyam a két lehetséges kimenet közé esik.

származtatott termékek replikálása az alaptermékkel nem más, mint az egyik binomiális martingál megfeleltetése egy másiknak.

Hasonló összefüggések érvényesek a *folytonos* esetben is. A Wiener-folyamat egy folytonos martingál, hiszen a növekménye egy zérus várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó. A folytonos martingálok növekményei is előrelátható módon megfeleltethetők egymásnak az ún. *martingál reprezentációs tételnek* megfelelően.[17] Tehát ekkor is kialakítható a ,,végtelenül rövid periódusokra" a megfelelő replikáló (ill. fedező) stratégia. A Girszanov-tétel értelmében a $dX_1(t) = a(t)dt + dW_1(t)$ folyamatok $dX_2(t) = dW_2(t)$ martingállá alakíthatók bizonyos feltételek mellett a valószínűségi mérték cseréjével.[18] Népiesen szólva a mértékcserével eltüntethető a drift, miközben a volatilitás változatlanul egységnyi marad. Ezek után a származtatott termékek árazása ugyanabban a 4 lépésben történik a folytonos modellben, akárcsak a binomiálisban, csupán a martingál tulajdonságot adó valószínűségi mérték nem a kockázatsemleges valószínűséget definiáló (21) képletből adódik, hanem a Girszanov-tételből.

Sztochasztikus reprezentáció

A binomiális árfolyam-alakulás esetén a dinamikus replikálás valószínűségszámítási átfogalmazása egyfelől a martingál tulajdonsághoz és a martingál-reprezentáción keresztül visszavezetett a replikáláshoz, másfelől a (22) várható érték jelenérték szabályra vezetett.

A pénzügyesek által felállított egyenletek itt is egy sokkal általánosabb, már régebben kidolgozott matematikai elméletbe torkolltak. A BS-féle PDE-t kielégítő g függvényhez található egy olyan sztochasztikus differenciálegyenlet (SDE), amelynek megoldását adó X folyamat T időpontbeli értékének a (t, x) időpontokból és állapotokból tekintett feltételes várható értékeit éppen a $g(t, x)$ függvény adja meg. Ez a *Feynman-Kac*-féle sztochasztikus reprezentáció. Ez a megfeleltetés az SDE-vel leírt diffúziós folyamat sajátja. Ez alapján a Black-Scholes PDE-nek megfeleltethető egy várható érték jelenértéke számítás, mivel a BS egyenlet kiindulópontja is egy diffúziós SDE, amelyre alkalmazható az Ito-lemma.

Nézzük meg némi formalizmussal. *Cauchy* a pénzügyektől teljesen függetlenül vizsgálta az alábbi PDE-t:

$$g_t + \mu(x,t)g_x + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)g_{xx} = 0\,, \qquad g(T,x) = \Phi(x)\,. \tag{24}$$

Tekintsük a következő $X(t)$ diffúziós folyamatot, amely a kiválasztott t időpontban a rögzített x értéket veszi fel:

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW\,, \qquad X(t) = x\,. \tag{25}$$

[17]Baxter-Rennie (2002) 100. o.

[18]Baxter-Rennie (2002) 95. o., Avellaneda-Laurence (2000) 167. o.

Ha vesszük az X folyamatnak a g függvény szerinti transzformáltját, akkor felírva az Ito-formula integrál alakját,[19] és felhasználva, hogy a $g(t,x)$ függvény kielégíti a (24) egyenletet, a Feynman-Kac formulát kapjuk:

$$g(t,x) = \mathbf{E}_{t,x}\left[\Phi(X_T)\right] . \tag{26}$$

Ha a következő analóg problémát vizsgáljuk:

$$g_t + \mu(x,t)g_x + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)g_{xx} + rg = 0\,, \qquad g(T,x) = \Phi(x)\,, \tag{24b}$$

akkor a (26) a következő formát ölti:

$$g(t,x) = e^{r(T-t)}\mathbf{E}_{t,x}\left[\Phi(X_T)\right] . \tag{26b}$$

A Feynman-Kac formula adja meg a kapcsolatot a BS egyenlet és a várható érték jelenérték szabály között folytonos esetben.

A diffúzió

A diffúzió egyszerre fizikai, pénzügyi és matematikai jelenség.[20] Képzeljünk egy mindkét irányban végtelen vasrudat, ahol $g(t,x)$ mutatja az x helyen a t időpontban mért hőmérsékletet. A hőáramlás, vagy diffúzió

$$g_t = g_{xx} \tag{27}$$

egyenlete egy alaposan megvizsgált folyamat, ahol g_t a hőmérséklet változása egy adott pontban, g_{xx} pedig a hőmérséklet térbeli második deriváltja. Az egyenlet tartalma: bontsuk a rudat Δx hosszú kis intervallumokra. Ha egy adott intervallum bal szomszédja melegebb, a jobb szomszédja pedig hidegebb, akkor az adott intervallum hőmérséklete akkor nő, ha több hő érkezik balról, mint amennyi távozik jobbra. Ez pedig a hőmérsékletkülönbségek eltérése pontosan a (27) egyenlet szerint, feltéve, hogy a szomszédos intervallumok közötti hőcsere arányos a hőmérséklet különbséggel. Ez azt is jelenti, hogy a $g(x)$ függvény inflexiós pontjai választják külön azokat az intervallumokat, amelyek pontjai melegszenek, azoktól, amelyek pontjai hűlnek.

Ha a 0 időpontban az $x = 0$ helyen koncentrálódik a teljes hőmennyiség a rúdban, akkor t idővel később a hőmérséklet eloszlása a rúd különböző részein:[21]

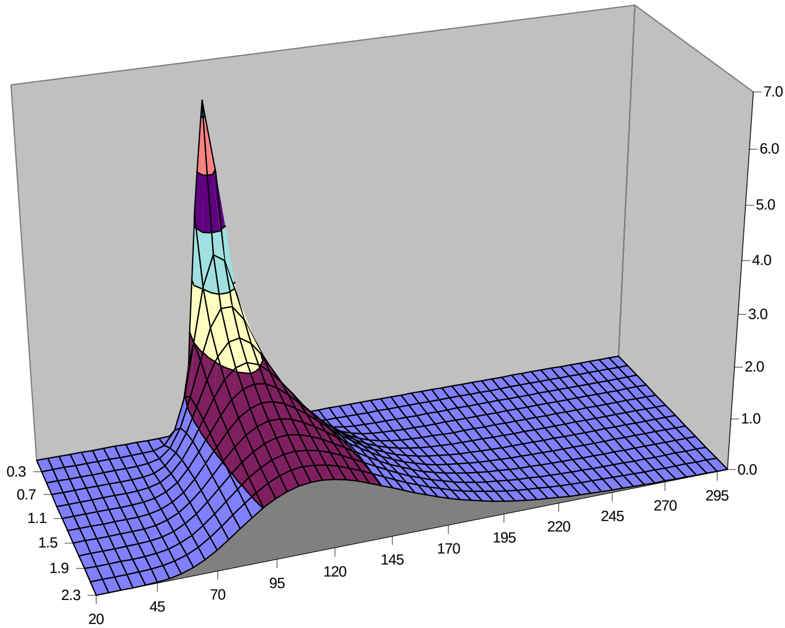
$$g(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} . \tag{28}$$

Mielőtt nagyon belemelegednénk e kitérőbe, vegyük észre:

1. a (27) diffúziós PDE hasonlóságát a (9) Black-Scholes PDE-vel;
2. az időbeni szétterülés a Gauss-függvénnyel írható le.

[19] Részletesen ld. Björk (1998) 58-62. o.
[20] És feltehetően még tucatnyi tudományterület felől beazonosítható jelenség.
[21] Részletesen ld.: Wilmott-Howison-Dewynne (1995) 59-69. o.

Az 1. pontbeli hasonlóság teljesebb, mint gondolnánk. A változók (S, t, g) átskálázásával a (9) a jóval egyszerűbb (27) formára hozható.[22] A 2. pontbeli analógia jól látható, ha az (1) és (2) képletek segítségével ábrázoljuk a jövőbeli árfolyam eloszlását, ha tudjuk a mai árat.



1. ábra. Az árfolyam eloszlásának változása az idő függvényében ($S_0 = 100$), Árf: 20-300, idő: 0-3 év

Konzisztens árazás, komponensárak

A határidős pozíció egy statikus replikációval értékelhető, az opció egy dinamikus replikációval. Ezek a kiinduló alapesetei az *arbitrázsárazásnak*. Az arbitrázsárazás esetén eltűnnek a mikroökonómia kereslet-kínálat görbéi, a helyükre lépő egyszerű alapelv: ha két különböző portfólió ugyanazt a kifizetés sorozatot biztosítja a jövőben, akkor a jelenbeni értéküknek is azonosnak kell lenniök. Amilyen egyszerűen hangzik az elv, annyira nem kedvelik a

[22] Az átskálázás lényege, hogy dimenzió nélküli változókkal számolunk. Nem a forintban mért derivatív árat keressük, hanem a lehívási árfolyam százalékában $[g/K]$, nem az árfolyam-alakulásával számolunk, hanem az árfolyam és a lehívási árfolyam logszázalékos távolságával $[\ln(S/K)]$, nem az években mért idővel, hanem a lejáratig hátralevő varianciamennyiség a változó $[0.5\sigma^2(T-t)]$. Részletesebben ld.: Wilmott-Howison-Dewynne (1995) 76-81. o.

hallgatók vizsgafeladatnak a *dinamikus arbitrázs* egyszerűbb eseteit sem. Arbitrázs lehetőség akkor van, ha létezik olyan *stratégia*, amely révén egy nulla induló pozícióból indulva pozitív valószínűséggel nyerünk, miközben kizárt, hogy bármely esetben is veszítsünk. Ha az árak konzisztensek, akkor nincs arbitrázs lehetőség. A konzisztencia ellenőrzése egyszerű a diszkrét idejű, diszkrét állapotterű folyamatok esetén, különösen a T-termékekre.

A különböző termékek lejárati értéke egy-egy n elemű vektorral adható meg (feltéve hogy a T időpontban n lehetséges állapot van). Ha beárazzuk ezt az n darab T-időpontbeli egységvektort, mint speciális származtatott termékeket, akkor az *Arrow-Debreu* árakat *(komponens árakat)* kapjuk. Bármely termék ára ezek lineáris kombinációja. Ellenkező esetben arbitrázs lehetőség van. A komponensárakat (AD árakat) a várható érték jelenértéke szabály alapján egyszerűen megkaphatjuk: mivel a kifizetésvektor az egységvektor, ezért a várható érték az adott állapot valószínűsége: így az AD ár az állapotvalószínűség diszkontált értéke.

Az Arrow-Debreu modell a kerete az előbb felvázolt gondolatmenetnek. Azonban mi egy tetszőleges termék több periódus utáni lehetséges állapotaihoz rendelt komponensáraiból raktuk össze a termék jelenbeni árát,[23] az AD modell alapesetben egy 1 periódusos elemzés, amelyben N értékpapír jelenbeni árait a p vektor tartalmazza, a periódus végi lehetséges állapotokat az ($N \times M$-es) V mátrix. A p vektor és a V mátrix minden információt tartalmaz, az értékpapírpiac minden jellemzőjét lineáris algebrai tételekből kapjuk a probléma ilyen megfogalmazásában. Az AD modellben a piac akkor és csak akkor *arbitrázsmentes, ha a p árvektor a V oszlopvektorainak súlyozott átlaga, ahol a súlyok pozitívak* és egyértelműen meghatározottak.[24] Amennyiben a V mátrixnak van egy olyan sora, amely azonos elemekből áll, akkor van egy kockázatmentes befektetési lehetőség. Ez esetben, ha teljesül az a feltétel, hogy az árvektor az oszlopvektorok súlyozott átlaga (tehát nincs arbitrázslehetőség), akkor az árvektor kifejezhető a várható érték jelenérték szabály alapján. Az AD modellben az arbitrázsmentességből és a korlátlan hitel/betét lehetőségből következik a kockázatsemleges valószínűségek vektorának létezése és a várható érték jelenérték szabály.[25] Az illusztráció kedvéért legyen $N = 2$, $M = 2$ és

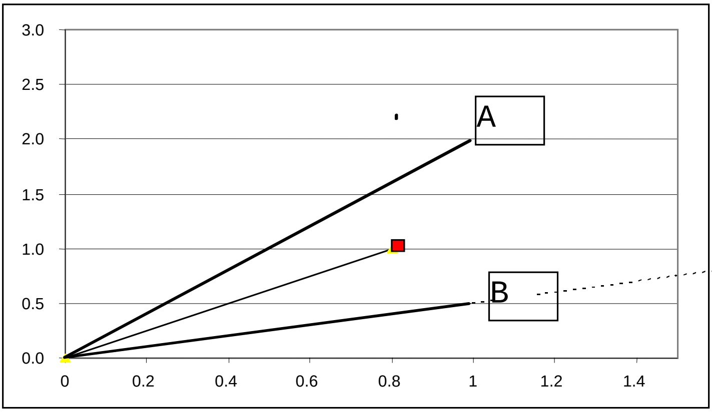
$$p = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a súlyok: $\pi = (\,0.4 \quad 0.4\,)$, a kamatláb 25%, és a kockázatsemleges valószínűségek: $\pi' = (\,0.5 \quad 0.5\,)$.

[23] A (22) összegképlet tagjainak első két komponensét összezárójeleztük: $e^{-rT} p_k g_k = \left(e^{-rT} p_k\right) g_k = AD_k g_k$.

[24] A bizonyítást ld. Avellaneda-Laurence (2000) 3–5. o.

[25] Uo. 6–8. o.



2. ábra. Az Arrow-Debreu modell két termékre és két állapotra

A *2. ábrán* a vízszintes tengelyen az 1. termék, a függőleges tengelyen a 2. termék lehetséges értékei szerepelnek. A V mátrix egyes oszlopait az ábra (A, B) pontjai reprezentálják. Az arbitrázsmentesség feltétele, hogy az árvektor a $0A$, $0B$ félegyenesek közötti területre essen. Az ábrán a két pont azonos függőleges egyenesen fekszik, mert az 1. termék kockázatmentes. Ennek ára (0.8) meghatározza, hogy az árvektor mely függőleges egyenesre essen (P pont).

Külön kihangsúlyozandó, hogy az AD modellben semmi valószínűségszámítási feltétel nincsen, semmi a normális eloszlásról, vagy a Wiener-folyamat binomiális közelítéséről stb.

A piac teljessége

Tegyük fel, hogy a V $(N \times M)$ mátrix sorai az N kereskedett értékpapír lehetséges értékeit tartalmazza az 1 periódus múlvai M lehetséges állapotokra. A piacot[26] akkor nevezik teljesnek, ha tetszőleges (M elemű) kifizetés előállítható a kereskedett papírokból álló portfólió segítségével, azaz tetszőleges M elemű vektor előállítható a V mátrix soraiból. Ez akkor teljesül, ha a V mátrix rangja M. Ha van egy kockázatos részvényünk és egy kockázatmentes kötvényünk, és a részvény árfolyam-alakulását egy trinomiális fa írja le, akkor a V mátrixunk 2×3-as mátrix és a piac nem teljes.

Ha a piac teljes és arbitrázsmentes, akkor léteznek és egyértelműek az állapotárak (komponensárak), és ily módon a kockázatsemleges valószínűségek.[27] A tétel megfordítása is igaz: ha a komponensárak egyértelműek, akkor a piac (modell) teljes.[28]

[26] Az elnevezési konvenció a *piac* teljességéről beszél, azonban sokkal inkább valamely *modell* teljességéről van szó, mint egy létező piac (pl. argentin értékpapírpiac) teljességéről. Vö. binomiális vs. trinomiális modell.

[27] A trinomiális modellben találhatók kockázatsemleges valószínűségek, de nem egyértelműek. Ld. Avellaneda-Laurence 16-18. o.

[28] Bizonyítást ld. Avellaneda-Laurence 15. o.

Harrison és Pliska vizsgálta meg általánosan, hogy miként függ össze

- a *piacok teljessége* (replikálhatóság),
- az *árak összhangja* (arbitrázsmentesség),
- a *martingálmérték* létezése és egyértelműsége (kockázatsemleges értékelés).

Az eszközárazás alaptétele:

1. A piac akkor és csak akkor *arbitrázsmentes*, ha *létezik* martingálmérték
2. A piac akkor és csak akkor *teljes*, ha ez a martingálmérték *egyértelmű*.

Az alaptétel különböző esetekre vonatkozó változatai a *Harrison-Pliska tétel*, a *Dalang-Morton-Willinger tétel*, ill. a *Delbaen-Schachermayer tétel.*[29]

A nem-teljes piacok alapesete, amikor maga az *alaptermék nem* egy *kereskedett* befektetési eszköz. Befektetési eszköz —traded security— olyan termék, amelyet kizárólag befektetési célból tart számos befektető. Ezek jellemzője, hogy ugyanúgy lehet short pozíciót nyitni bennük, mint long pozíciót, viszonylag alacsony a tranzakciós és tárolási költségük, többnyire könnyen transzferálhatóak. Az olajnak van ugyan ára, de az ármeghatározódása nagyon eltérő mechanizmusú, mint a befektetési eszközöké. *Az olaj határidős ára nem egyszerűen az azonnali olajár felkamatoztatott értéke* (még akkor se, ha figyelembe vesszük a tárolási stb. költségeket). Ugyanakkor az azonnali ár *befolyásolja* valahogy azoknak a befektetési eszközöknek az értékét —ha nem is határozza meg egyértelműen a kamatlábbal együtt— amelyek ára az olajon alapszik (pl. olajra szóló futures kontraktus és vételi jog).

A kockázat piaci ára

Tegyük fel, hogy egy nem kereskedett termék árfolyam-alakulása Ito-folyamat. Az erre szóló származtatott termékek árfolyam-alakulása ugyanezt az időbeli bizonytalanságot tükrözi, ezért a kockázat kiküszöbölhető. Ám ebben a kockázatmentes portfólióban két ismeretlen árú származtatott termék szerepel, két ismeretlen van, és egy egyenlet. Ezért a származtatott termékek ára nem egyértelmű, de ha már ismerjük akárcsak egyetlen származtatott termék árát, akkor ismerjük az összes többit. Ennek hiányában a különböző származtatott termékek árának konzisztencia kritériuma:[30]

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{35}$$

értéknek azonosnak kell lenni minden származtatott termékre. A λ szokásos elnevezése: *a kockázat piaci ára.* Ha az alaptermék kereskedett, akkor $\lambda = 0$.

[29] A különböző megközelítések között lényeges különbség, hogy a vizsgált folyamat időben diszkrét vagy folytonos, és a lehetséges árfolyamokra nézve a folyamat diszkrét vagy folytonos. Részletesebben ld. Medvegyev (2002). A szerző itt az alaptétel általa vizsgált esetének egy új bizonyítását adja.

[30] Részletesen ld: Hull (1999.) 365. o.

Ha ismerjük a λ értékét (amit tudnánk, ha ismernénk a befektetők kockázattal kapcsolatos hasznossági függvényét), akkor tudjuk a származtatott termék értékét is. Megszabadulunk a λ meghatározásának nehézségétől, ha például nem csak az olaj árát ismerjük, hanem kiindulópontként ismerjük a határidős olajárat, és ez alapján akarunk beárazni egy olajra szóló opciót. A legfontosabb nem kereskedett pénzügyi termék a *kamatláb*. A kötvény egy kereskedett termék, de a hozama nem.

Egzotikus opciók

Említettük, hogy egy származtatott termék beárazása attól függ, hogy mi a termék definíciója (kifizetése) és mi az alapfolyamat jellege. A legegyszerűbb eset: a T-termék + GBM alapfolyamat konstans kamatlábbal és volatilitással. Nézzük előbb a különböző termék definíciókat, az alapfolyamat kicserélésének a hatását pedig a következő alpontban.

Az *amerikai opcióknál* a T időpontig bármikor lehívható az opció, nem csak a T időpontban, mint az európai opció. Értékelésére nincs zárt formula, a probléma matematikailag izgalmasnak számít, numerikusan viszont igen egyszerű algoritmus használatos: ugyanúgy kell elkészíteni a fát, de minden pontjában meg kell vizsgálni, hogy az azonnali lehívás nem jelentene-e nagyobb értéket, ha igen, akkor ezzel az értékkel kell tovább számolni lépésenként a várható érték jelenértéke szabály alapján. Az amerikai opciók még nem számítanak egzotikusnak, annál is inkább, mert legalább annyira elterjedtek, mint az európaiak.

A T-termékek esetén meg kell tudni mondani, hogy a kockázatsemleges (martingál) valószínűséggel számolva mi a T időpontbeli árfolyam eloszlása. A GBM folyamat elég egyszerű ahhoz, hogy meg lehessen mondani nem csak az S árfolyam eloszlását a T időpontban, hanem a $[0, T]$ időszak *átlagárfolyamának* az eloszlását, az időszak *maximum*, vagy *minimum* árfolyamának eloszlását, azt, hogy milyen valószínűséggel lép át ez idő alatt az S folyamat egy adott *küszöbárfolyamot*[31] stb. Az így transzformált változók alapján definiált származtatott termékeket nevezik egzotikus opcióknak. Ha rendszeresen (pl. hetente) szerzünk be valamely termékből 1 éven át, akkor az 1 év múlvai árfolyam eloszlásánál sokkal fontosabb az év alatti átlagárfolyam eloszlása.[32] Bevezetve

$$I(t) = \int_0^t S(\tau)\, d\tau \tag{36}$$

állapotváltozót, azon származtatott termék értéke, amelyek értéke függ ettől

[31] Az átlagárfolyam eloszlása az ázsiai, a maximum (minimum) eloszlása a visszatekintő opció (lookback), adott küszöbárfolyam eloszlása a limitáras (barrier) opció árazásában játszik szerepet. A visszatekintő opció felfogható úgy is, mint egy olyan amerikai opció, amit garantált, hogy jó időpontban hívunk le, mivel az időszak végén már tudjuk, hogy mi volt a legkedvezőbb árfolyam.

[32] Ez az átlag lehet aritmetikai vagy geometriai, folytonos mintavétellel, vagy időközönkénti mintából számolt.

a mennyiségtől is, eleget kell, hogy tegyen a

$$g_t = rg - rSg_S - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 g_{SS} - Sg_I \tag{37}$$

módosított Black-Scholes egyenletnek.

Az európai call opció két egzotikus opció különbségeként is felírható:

1. ingyen kapunk egy részvényt, ha az árfolyam nagyobb, mint K (long asset or nothing option)
2. fizetünk K dollárt, ha az árfolyam nagyobb, mint K (short cash or nothing option)

Az utóbbit szokás bináris, vagy digitális opciónak is nevezni. Mindkét opció értékében ugrás van a T időpontbeli értékében, így nehéz fedezni ATM esetben, közel a lejárathoz. A két opció értéke nem más, mint a (10)-es képlet két tagja, ami intuitive jól érthető.

Átlaghoz visszahúzás, ugrófolyamat

Az alap GBM folyamattal kapcsolatban legkönnyebben a *konstans kamatláb* feltevés oldható fel. Ha a kamatláb időben előrelátható, determinisztikus módon változik,[33] akkor a (26b) képletben mindössze a diszkonttényező változik, az $e^{-r(T-t)}$ helyére a

$$e^{-\int_t^T r(\tau)\,d\tau} \tag{38}$$

kifejezés kerül, determinisztikusan változó volatilitás esetén a $\sigma^2(T-t)$ helyére pedig az

$$\int_t^T \sigma^2(\tau)\,d\tau \tag{39}$$

kifejezés.

Fák használatakor az u, d, p paraméterek lépésről lépésre változhatnak (a választott modelltől függően), és minden lépésben más és más lesz a pillanatnyi kamatlábat tükrözően a diszkontfaktor. Az időben *változó volatilitás* diszkrét esetben már több problémát tud okozni, hiszen a változó u és d paraméterek mellett a binomiális fa csak akkor marad összeölelkező, ha $u_1 d_2 = d_1 u_2$ feltétel teljesül (ahol az indexek az egymást követő időszakokra utalnak). A változó volatilitás éppen azt jelenti, hogy a fák egyes oszlopait eltérő módon húzzuk szét függőlegesen. Annak érdekében, hogy a fák összeölelkezők maradjanak (ami lényegesen kevesebb számolást igényel), inkább a sztenderd Δt időbeli lépésközt célszerű változtatni.[34]

[33] A sztochasztikus kamatláb és volatilitás esetét ld. később, a több kockázati faktor tárgyalásakor.

[34] Részletesebben ld. Clewlow-Strickland 37. o.

Két gyakran alkalmazott lényeges módosítás az alapfolyamaton az átlaghoz visszahúzás (mean reversion) ill. az ugrások (jump process) bevezetése. Az *átlaghoz visszahúzás* a drift módosítása:

$$dx = a(b - x)dt + \sigma dW \; , \tag{40}$$

ahol a b az X változó hosszú távú értéke.[35] A matematikában Orstein-Uhlenbeck néven ismert (40) folyamatot mindenekelőtt a kamatlábak alakulásának leírásához használják — ekkor a b a kamatláb hosszú távú egyensúlyi értéke. A (40) egyenlethez tartozó folyamat értékei pozitív valószínűséggel vesz fel negatív értékeket. Ez küszöbölődik ki az ún. négyzetgyök folyamatnál *(square root process)*:

$$dx = a(b - x)dt + \sigma\sqrt{x}\, dW \; . \tag{41}$$

Az *ugrófolyamatnál* véletlen időpontokban meghatározott nagyságú ugrásokra kerül sor. Ezekről az ugrásokról azt szokták feltenni, hogy Poisson-folyamatot alkotnak, tehát a két ugrás között eltelt idő exponenciális eloszlású. A kevert modellben (jump-diffusion) már két kockázati forrás van, ekkor az ugrás fedezésére nincs mód, ami számos problémát vet fel.

A Heath-Jarrow-Morton modell

Először nézzük meg a rövid és hosszú kamatlábak változásainak, ill. a kumulált kamatlábak és a kötvény árfolyamok változásainak az összefüggését egy diszkrét számpéldán.

A logkamatlábak esetén az azonnali és a határidős kamatlábak közötti összefüggés:

$$G_n = e^{f_1} e^{f_2} \cdots e^{f_n} = e^{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = e^{n r_n} \; , \tag{42}$$

amiből:

$$r_n = \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n} \; , \tag{43}$$

ahol G_n mutatja, hogy n periódus alatt hányszorosára növekedett az egységnyi betét értéke. Az elemi kötvény (zero coupon bond) árfolyama a határidős logkamatlábakkal:

$$P_n = e^{-(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)\Delta t} = e^{-\sum f \Delta t} \; . \tag{44}$$

A $\sum f$ kifejezés a kötvény lejáratáig hátralevő időszak *kamattartalma*, egyben a *lejáratig hátralevő kumulált hozam* $Y(t,T) = f = \ln P_n$.

A kamatlábfáknál fontos szerepe van az *egy periódusra vonatkozó kamatlábnak*, amit rövid kamatlábnak (short rate) neveznek. Legyen ennek értéke a t időpontban $r(t)$. A folytonos modelleknél a periódushossz $\Delta t \to 0$. Jelölje $P(t,T)$ a T időpontban esedékes 1 Ft értékű elemi kötvény árfolyamát

[35] A drift előjele jól látható módon attól függ, hogy a folyamat éppen alatta vagy felette van-e a hosszú távú értéknek.

a t időpontban. Legyen az $f(t, T_1, T_2)$ a $[T_1, T_2]$ időszakra vonatkozó, a t időpontban rögzített határidős kamatláb. Legyen az $f(t, T)$ a $[T, T + \Delta t]$ időszakra vonatkozó, a t időpontban rögzített határidős kamatláb. Ez tehát egy későbbi időszakra vonatkozó 1 periódusos kamatlábat jelöl. Az *1. táblázatban* függőlegesen a lejáratok vannak, vízszintesen a naptári idő telik. Az $Y(t, T)$ a forward kamatlábak lejárat szerinti kumulált értékeit mutatja: induláskor 4 évre összesen 46% kamat esedékes.

Az $r(t, T) = Y(t, T)/T$ a hosszabb futamidejű azonnali kamatlábakat adja. Induláskor a 4 éves kamatláb $46\%/4 = 11.5\%$. A mindenkori n éves kamatlábat ebben táblában átlósan lefelé haladva lehet nyomon követni a $T + \Delta t - t = n$ értékek mentén, hasonlóképpen a mindenkor éppen n éves kötvények árfolyamához. A mindenkori rövid kamatlábak a bal felső sarok főátlójában vannak $r(t) = f(t, t)$. A központi szerepet játszó résztábla a *kumulált kamat* $Y(t, T)$ — igazából ennek a tükörképe a másik 3 tábla. Amit a portfólióba be lehet tenni, azok a $P(t, T)$ kötvények. Amiről az újságok írnak, az az $r(t, T)$ hozamgörbe alakulása.

r(t)	**10.0%**	**12.0%**	**11.0%**	**12.0%**	
f(t,T)	1	2	3	4	**t**
1	**10.0%**				
2	11.0%	**12.0%**			
3	12.0%	13.0%	**11.0%**		
4	13.0%	14.0%	12.0%	**12.0%**	
T					

d r(t)		**2.0%**	**-1.0%**	**1.0%**
d f(t,T)	1	2	3	4
1	dT	dt		
2	*1.0%*	1.0%		
3	*1.0%*	1.0%	-2.0%	
4	*1.0%*	1.0%	-2.0%	0.0%
T				

Y(t,T)	1	2	3	4
1	**10.0%**			
2	21.0%	**12.0%**		
3	33.0%	25.0%	**11.0%**	
4	46.0%	39.0%	23.0%	**12.0%**

d Y(t,T)	1	2	3	4
2		1.0%		
3		2.0%	-2.0%	
4		3.0%	-4.0%	0.0%

P(t,T)	1	2	3	4
1	**0.905**	**1.0**		
2	0.811	**0.887**	**1.0**	
3	0.719	0.779	**0.896**	**1.0**
4	0.631	0.677	0.795	**0.887**

dP/P	1	2	3	4
1	**0.100**			
2	0.090	**0.120**		
3	0.080	0.140	**0.110**	
4	0.070	0.160	0.110	**0.120**

r(t,T)	1	2	3	4
1	**10.0%**			
2	10.5%	**12.0%**		
3	11.0%	12.5%	**11.0%**	
4	11.5%	13.0%	11.5%	**12.0%**

d r(t,T)	1	2	3	4
1				
2		1.5%		
3		1.5%	-1.5%	
4		1.5%	-1.5%	0.5%

1. táblázat. Forward kamatlábak, kumulált kamatlábak, hosszú kamatlábak, kötvény árfolyamok

Miután felvázoltuk az $r(t)$, $f(t, T)$, $Y(t, T)$, $r(t, T)$, $P(t, T)$ kapcsolatát, és ezek változásainak kapcsolatát, bontsuk meg a változásokat determinisztikus és sztochasztikus részre. A kiindulópont legyen a forward kamatlábak változása, ami folytonos esetben:

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW \ . \tag{45}$$

Heath, Jarrow és Morton vizsgálták a *forward kamatlábak dinamikáját* és alapvető megállapítást tettek a (45) egyenlet driftje és volatilitása közötti szükségszerű kapcsolatról a kockázatsemleges elemzés keretei között.

A kötvények árfolyam-alakulásának vizsgálatakor kiemelkedő fontosságú az az eset, amikor annyi különböző lejáratú kötvény van, hogy minden periódus végén van lejáró kötvény.[36] Ekkor minden t időpontban van tetszőleges T időponttól kezdődő 1 periódusos határidős kamatláb. Ha ismerjük a kötvények árfolyamának alakulását, és azok Ito-folyamatot követnek, akkor adott a határidős kamatlábak alakulásának a folyamata is.

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt + v(t,T)dW \,, \qquad v(t,t) = 0 \,, \tag{46}$$

$$P(t,T_2) = P(t,T_1)e^{-f(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)} \,, \tag{47}$$

$$f(t,T_1,T_2) = \frac{\ln P(t,T_1) - \ln P(t,T_2)}{T_2 - T_1} \,. \tag{47b}$$

Az Ito lemma segítségével:

$$d\ln P(t,T_1) = \left(r(t) - \frac{1}{2}v^2(t,T_1)\right)dt + v(t,T_1)\,dW \,, \tag{48}$$

$$d\ln P(t,T_2) = \left(r(t) - \frac{1}{2}v^2(t,T_2)\right)dt + v(t,T_2)\,dW \,, \tag{49}$$

$$df(t,T_1,T_2) = \frac{1}{2}\frac{v^2(t,T_2) - v^2(t,T_1)}{T_2 - T_1}dt - \frac{v(t,T_2) - v(t,T_1)}{T_2 - T_1}dW \,. \tag{50}$$

A $T_2 \to T_1$ határátmenet révén:

$$df(t,T) = v(t,T)v_T(t,T)\,dt - v_T(t,T)\,dW \,, \tag{51}$$

$$v(t,T) = v(t,T) - v(t,t) = \int_t^T v_T(t,u)\,du \qquad v(t,t) = 0 \,. \tag{52}$$

Ha α és σ jelöli a forward kamatláb alakulásának együtthatóit, akkor az (51) alapján:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW \,. \tag{53}$$

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)\,du \,. \tag{54}$$

A levezetés tartalma:

- a határidős kamatláb két „szomszédos” elemi kötvény kamattartalmának a különbsége (47)
- ha ismerjük a kötvény árfolyam változását (46), akkor ismerjük a kamattartalom változását is az Ito-lemma segítségével (48)–(49)
- az (54) formából kiolvasható, hogy *a forward kamatláb driftjét egyértelműen meghatározza a volatilitás szerkezet.*

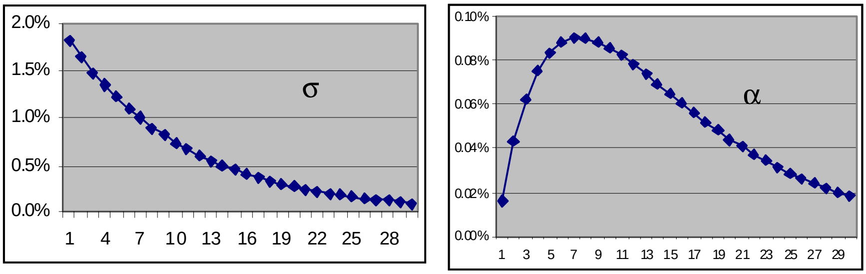
[36] Ez folytonos esetben kontinuum sok kötvényt jelent.

Az (54) formula a HJM modell és egyben a modern kamatelmélet egyik központi állítása: *a különböző futamidejű kamatlábak alakulásának konzisztencia (no-arbitrage) feltételét* fogalmazza meg. Egyik triviális olvasata, ha tökéletes előrelátás van ($\sigma(t,T)=0$ minden T-re), akkor a forward kamatláb adott T időpontra nézve időben konstans (az $\alpha(t,T)=0$ minden T-re).

A *forward kamatlábak volatilitás szerkezetére* szokásos feltevés, hogy

$$\sigma(t,T)=\sigma(T-t)=\sigma e^{-\lambda(T-t)}\ , \tag{55}$$

ahol a λ a *volatilitás csökkenés faktor* (volatility reduction factor).



3. ábra. A forward kamatláb alakulásának volatilitása $[\sigma(T)]$ és driftje $[\alpha(T)]$ adott volatilitás csökkenés faktor mellett ($\lambda=0.1$, $\sigma=2\%$) a lejárat (T) függvényében

Az *elemi kötvény* árfolyam-alakulása megadja az 1 periódusos forward kamatlábak alakulását, és megfordítva: ha ismerjük a kötvény kamattartalmát adó komponensek változásait, akkor tudjuk annak az összegének a változását, ill. az összeg logaritmusának változását. A forward kamatláb dinamika egyértelműen megadja a mindenkori *rövid kamatláb* dinamikáját, hiszen

$$r(t)=f(t,t)\ . \tag{56}$$

A *rövid kamatláb, a forward kamatláb, az elemi kötvény árfolyam* alakulását leíró (57)-(59) egyenletek bármelyike lehet az elemzés kiinduló pontja, bármelyikből megkapható a másik kettő.[37]

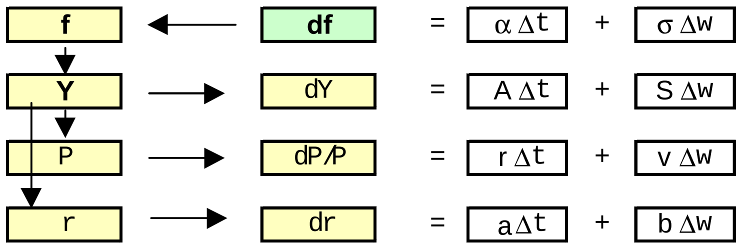
$$dr(t)=a(t)\,dt+b(t)\,dW \qquad \text{short rate} \tag{57}$$

$$df(t,T)=\alpha(t,T)\,dt+\sigma(t,T)\,dW \qquad \text{forward rate} \tag{58}$$

$$dP(t,T)=P(t,T)m(t,T)\,dt+P(t,T)v(t,T)\,dW \qquad \text{bond price} \tag{59}$$

$$r(t)=f(t,t)\,, \qquad m(t,T)=r(t)\ . \tag{60}$$

[37]Részletesebben és a levezetéseket illetően ld. pl. Björk . Az a, b vektorokból csak kiegészítő információkkal kapható meg az α és σ matrix, de a fordított irányban az összefüggés teljesen egyértelmű.



2. táblázat. A forward kamatláb és a kötvény árfolyam alakulásának komponensei

Vizsgáljuk meg sztochasztikus kamatlábak mellett a *változó kamatozású elemi betét* értékének és a T időpontban lejáró *elemi kötvény* árfolyamának alakulását. Elemi betét: egységnyi induló összeg kamatozik a T időpontig, eközben nincs kivétel és pótlólagos betételhelyezés. Az elemi betét értéke a t időpontban a $[0, T]$ időszak már mögöttünk levő periódusai rövid kamatainak az összegét tükrözi, az elemi kötvény a még előttünk levő periódusok forward kamatainak az összegét.

Kockázatsemleges világban a két terméknek azonos várható hozamot kell biztosítani minden periódusban: az éppen aktuális rövid kamatlábat. Ha a várható növekedési ütemük azonos, akkor a két termék értékének a hányadosát képezve $[P(t,T)/A(t)]$, annak várható értéke a pillanatnyi értékével kell, hogy megegyezzen. Más szavakkal, a hányados egy martingál jellegű sztochasztikus folyamat. Mindkét termék értékét minden időpontra az induló forward görbe és a forward kamatlábak változásainak a segítségével írjuk fel.

$$f(t,T) = f(0,T)+\sum_s \Delta f(s,T) = f(0,T)+\sum_s \alpha(s,T)\Delta t+\sum_s \sigma(s,T)\Delta W(s) \tag{61}$$

Az elemi betét alakulása $\quad u: 0 \to t \quad s: 0 \to u$

$\quad s: 0 \to t \quad u: s \to t$

$$r(t) = f(t,t) = f(0,t) + \sum_s \alpha(s,t)\Delta t + \sum_s \sigma(s,t)\Delta W(s) \tag{62}$$

$$A(t) = 1e^{\sum r(u)\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \ln A(t) = \sum_u r(u)\Delta t = \sum_{u=0}^{t-\Delta t} f(0,u)\Delta t + \sum_{s=0}^{t-\Delta t}\left(\sum_{u=s}^{t-\Delta t}\alpha(s,u)\Delta t\right)\Delta t + \\ + \sum_{s=0}^{t-\Delta t}\left(\sum_{u=s}^{t-\Delta t}\sigma(s,u)\Delta t\right)\Delta W(s)\,. \end{aligned} \tag{63}$$

Az elemi kötvény árfolyam-alakulása $\quad u: t \to T \quad s: 0 \to t$

$\quad s: 0 \to t \quad u: t \to T$

$$P(t,T) = 1e^{-\sum_u f(t,u)\Delta t} \qquad P(T,T) = 1 \tag{64}$$

$$\ln P(t,T) = -Y(t,T) = -\sum_{u=t}^{T-\Delta t} f(t,u)\Delta t$$

$$\begin{aligned} Y(t,T) = & \sum_{u=t}^{T-\Delta t} f(0,u)\Delta t + \sum_{s=0}^{t-\Delta t}\left(\sum_{u=t}^{T-\Delta t}\alpha(s,u)\Delta t\right)\Delta t + \\ & + \sum_{s=0}^{t-\Delta t}\left(\sum_{u=t}^{T-\Delta t}\sigma(s,u)\Delta t\right)\Delta W(s) \end{aligned} \tag{65}$$

A diszkontált elemi kötvény alakulása

$$\begin{array}{ll} s:0\to t & u:s\to t \\ s:0\to t & u:t\to T \\ \hline s:0\to t & u:s\to T \end{array}$$

$$\frac{P(t,T)}{A(t)} = P(0,T)e^{-\sum_{s=0}^{t-\Delta t}\left(\sum_{u=s}^{T-\Delta t}\alpha(s,u)\Delta t\right)\Delta t - \sum_{s=0}^{t-\Delta t}\left(\sum_{u=s}^{T-\Delta t}\sigma(s,u)\Delta t\right)\Delta W(s)} \tag{66}$$

$$\frac{P(t,T)}{A(t)} = \frac{e^{-(f_t+f_{t+1}+\cdots+f_{T-1})}}{e^{f_0+f_{t+1}+\cdots+f_{t-1}}} = e^{-(f_0+f_1+\cdots+f_{T-1})}\,, \tag{67}$$

ahol a szóban forgó forward kamatlábak a t időpontra kialakult értékeket jelentik.

Az elemi kötvény árfolyam-alakulása akkor és csak akkor arbitrázsmentes, ha a $P(t,T)/A(t)$ a kockázatsemleges valószínűség mellett

$$P(0,T) = \mathbf{E}_Q[P(t,T)/A(t)]$$

minden T-re. Ez akkor teljesül, ha a (66) képletben az induló árfolyam szorzótényezőjének várható értéke 1. Belátható, hogy ez pont akkor teljesül, ha fennáll a HJM drift feltétele.[38]

A (66)-(67) képletek sajátossága, hogy itt a viszonyítási alapot jelentő $A(t)$ betét alakulása maga is egy sztochasztikus folyamat. A közgazdaságtanban a pénz jelenti a stabil összehasonlítási alapot a sokszínű áruvilágban (numeraire, ha egyáltalán belefér az adott közgazdasági iskola érvrendszerébe), a betét alakulása a pénz dinamikája, ennek sztochasztikus változatát láttuk most kulcsszerepben.

A Ho-Lee, Hull-White modellek

A HJM elemzés általános feltételek között vizsgálja a jövőbeni rögzített időszakokra vonatkozó forward kamatlábak változásainak hatásait. Ha specifikáljuk a forward kamatlábak volatilitás struktúráját, akkor a mindenkori

[38] A levezetést ld. Jarrow-Turnbull (2000).

rövid kamatlábak dinamikájára konkrét összefüggéseket kapunk. A *Ho-Lee modellnek* nevezett

$$dr = b(t)dt + \sigma dw \tag{68}$$

rövid kamatláb modellben minden forward kamatláb volatilitása azonos (σ). Az (55) képletben definiált volatilitás struktúra felel meg a *Hull-White modellnek* nevezett

$$dr = a\left[b(t)/a - r\right]dt + \sigma dw \tag{69}$$

kamatláb-alakulásnak. Az a paraméter az átlaghoz visszahúzás erősségét mutatja, egyben az (55) képlet volatilitáscsökkenés faktora is (λ). Az $a = 0$ esetre a (68) a (69) speciális esete. A $b(t) = b$ esetben a klasszikus, úttörő jellegű kamatláb modellt, a *Vasicek modellt* kapjuk.[39]

Valamilyen oknál fogva az olyan modelleket, amelyekben csak 2-3 paraméter van (pl. a Vasicek modell) *egyensúlyi* (equilibrium) modelleknek nevezik, amelyben valamely paraméter az idő függvénye (pl. Hull-White), azokat pedig *arbitrázsmentes* (no arbitrage) modelleknek.[40]

Anélkül, hogy akár felszínesen is átszaladnánk a számtalan kamatláb modell közül legalább a népszerűeken, inkább egy számpéldán érzékeltetjük a korábban elmondottak (mindenekelőtt a komponensárak) használatát a kamatláb-alakulás modellezésében.

Tegyük fel, hogy az 1-3 éves elemi kötvény árfolyamok rendre: $P_1 = 0.9$, $P_2 = 0.8$, $P_3 = 0.7$, és a forward kamatlábak volatilitása minden időszakra 1.5%. Milyen binomiális kamatlábfa írja az 1 éves logkamatlábak lehetséges alakulását, amely megfelel az elemi kötvény árfolyamokból számított hozamgörbének? Készítsünk EXCEL táblát, amely elkészíti az induló paraméterekhez tartozó binomiális kamatlábfát, az ehhez tartozó komponensárakat, ezek oszlopösszegeként az elemi kötvény árfolyamokat, ezekből a hozamgörbe értékeit. Legyen az induló kamatláb 10%, legyen $b(t) = b = 1.5\%$.

[39] Ez pontosan a (40)-es egyenlet, ahol az x jelentése a rövid kamatláb. A (41)-es képlet, mint kamatláb modell a Cox-Ingersoll-Ross (CIR) modell nevet viseli.

[40] Véleményünk szerint az elsőnek sincs több köze az egyensúlyhoz, és a másodiknak se az arbitrázsmentességhez, csupán az a különbség, hogy a kevés paraméteres modelleket nem lehet pontosan hozzáilleszteni a pillanatnyi hozamgörbéhez, a sok paramétereset pedig gond nélkül lehet. A kérdés ezen paraméterek időbeli stabilitása, és könnyen megtörténhet, hogy a modell idővel rohamosan veszít leíró erejéből a régi kalibrálás mellett.

t	0	1	2	3
b			**1.5%**	**1.5%**
σ			**1.5%**	**1.5%**
				16.00%
			13.00%	13.00%
r1		**10.00%**	10.00%	10.00%
3				0.087
2			0.201	0.267
1		0.455	0.408	0.274
0	1	0.455	0.207	0.094
P	1.0	**0.909**	**0.815**	**0.722**
G	1.0	1.1000	1.2263	1.3850
spot		10.00%	10.74%	11.47%

3. táblázat. A megadott kamatlábfához tartozó hozamgörbe

A SOLVER segítségével módosítathatjuk a $b(t)$ értékeket és az induló kamatlábat úgy, hogy a P vektor értékeiként a megadott számok jöjjenek ki.

t	0	1	2	3
b			**-0.09%**	**0.33%**
σ			1.5%	1.5%
				17.35%
			14.02%	**14.35%**
r1		**11.11%**	**11.02%**	**11.35%**
3				0.084
2			0.197	0.259
1		0.450	0.400	0.266
0	1	0.450	0.203	0.091
P	1.0	**0.900**	**0.800**	**0.700**
G	1.0	1.1111	1.2500	1.4286
spot		11.11%	11.80%	12.62%

4. táblázat. A keresett kamatlábfa

A 3 éves 12.62% kamatláb a kamatlábfában található összes lehetséges 1 éves kamatláb súlyozott átlaga, ahol a súlyozási procedúrát a komponensárak számítása jelenti.

Az átlaghoz visszahúzó Hull-White modellhez tartozó fa, egy megnyírt trinomiális fa. A megnyírás azt jelenti, hogy van egy minimum és maximum kamatláb, és ezeken a határokon nem lép át a folyamat. A megnyírt szakasz szélső pontjaiból is 3 felé ágazik a fa, de két ág a fa belseje felé mutat, és ezeken a pontokon mások az átmenet-valószínűségek, mint a fa belsejében. Az adott fához ez esetben is egyszerűen a komponensárak kiszámításán és az elemi kötvény árfolyamokon keresztül jutunk el a hozamgörbéhez. A fordított irányban itt is általában az iteráció segíthet (amikor adott hozamgörbéhez keressük a megfelelő kamatlábfát).

Több kockázati faktor

Ha egynél több kockázatos termékünk van, akkor ez több kockázati faktort is jelent. Speciális kockázatos termék a devizaárfolyam, vagy a kötvény árfolyama sztochasztikus kamatláb esetén.[41] Egyetlen kockázatos termék esetén is lehet két kockázati faktorunk, mindenekelőtt, ha sztochasztikus a volatilitás.[42]

A folytonos modelleknél minden úgy működik, mint régen, csak nem 1 db, hanem n db korrelált Wiener-folyamatunk van.[43] Továbbra is igaz, hogy ha n db kockázatos termékünk van, amit n db Wiener-folyamat hajt meg,[44] akkor a kockázat kiküszöbölhető, és a replikálás átfogalmazható a várható érték jelenérték szabállyá, ahol a kockázatsemleges valószínűséggel kell a várható értéket számolni, és a kockázatmentes kamatlábbal kell diszkontálni. A delta hedge úgy működik, hogy a származtatott termékből létesített rövid pozíciót az alaptermékekből folyamatosan akkora nagyságú hosszú pozíciókkal kell egyensúlyozni, amekkora az adott árfolyam szerinti érzékenysége a portfóliónak. Az egy kockázatos termékre felírt (8) egyenlet több alaptermékes változata:[45]

$$dV = \left(g_t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j g_{S_i S_j} \right) dt = V r \, dt \,, \tag{8a}$$

és innen a többfaktoros Black-Scholes egyenlet:

$$g_t = rg - r \sum_{i=1}^{n} S_i g_{S_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j g_{S_i S_j} \,. \tag{9a}$$

[41] Az 1 periódusos betét sztochasztikus kamatláb mellett is kockázatmentes termék.

[42] Ezekről a modellekről ad áttekintést magyar nyelven Zsembery [1999]

[43] A korábbi $[dW]^2 = dt$ hüvelykujjszabályunk a $dW_i dW_j = \rho_{ij} dt$ szabállyá általánosodik, és a többváltozós Ito-lemmát kell használni.

[44] Az olyan származtatott termékeket, amely több alaptermék függvénye, basket option vagy rainbow option névvel illetik.

[45] Ahol $g_{S_i S_j} = \frac{\partial g}{\partial S_i \partial S_j}$.

A *csereopciók* két kockázatos eszköz meghatározott arányban történő elcserélésére vonatkoznak a majdani T időpontban. A két termék árfolyamalakulása:

$$dS_i = \mu_i S_i dt + \sigma_i S_i dW_i\,, \quad i = 1,2\,; \qquad dW_1 dW_2 = \rho\,. \tag{5a}$$

Az (9a) egyenlet megoldása a

$$\max(q_1 S_1 - q_2 S_2, 0) \tag{70}$$

feltétel mellett:

$$c(S_1, S_2, t) = q_1 S_1 N(d_1) - q_2 S_2 N(d_2)\,, \tag{10a}$$

ahol

$$d_1 = \frac{\ln\frac{q_1 S_1}{q_2 S_2} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\,, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\,, \qquad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\,.$$

Amennyiben a $\sigma_2 = 0$, akkor az összefüggés a Black-Scholes képletre egyszerűsödik, hisz ekkor az egyik eszköz a kockázatmentes befektetés. Mivel a feladat két GBM távolságáról szól, nem teljesen meglepő, hogy a kapott formula ennyire emlékeztet a BS képletre.

A csereopciók egy fontos esete, amikor egy kockázatos eszközt egy más devizában rögzített fix összegre cserélünk (forward) vagy cserélhetünk (opció). Ezeket *quantóknak* nevezik. Amennyiben konstans kamatláb mellett két kockázatos termékre külön-külön felírjuk a binomiális modellt mint közelítést, akkor egy lépés után négy lehetséges állapotunk van, és nem tudunk egyértelmű replikációs stratégiát felírni. *Hua He* javasolt egy eljárást,[46] amelyben ha M kockázati faktorunk van, akkor egy $M+1$ irányba ágazó fával leírva az alaptermékek árfolyam-alakulását, így tudunk replikáló stratégiát felírni. E fa minden pontjához az alaptermékek egy n elemű árvektor tartozik. Az átmenet-valószínűség minden pontba $1/M$. Két kockázatos termékekre megmutatjuk a szükséges trinomiális fa szerkesztését.

$$dB_t/B_t = r dt \qquad dS_{t1}/S_{t1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dw_{t1}$$
$$dS_{t2}/S_{t2} = \mu_2 dt + \sigma_2\rho dw_{t1} + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}dw_{t2}$$

folytonos modell közelítése, ha $\Delta t = 1/n$:

$$P\left(\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3}\,, \qquad \mathbf{E}(\varepsilon_1) = \mathbf{E}(\varepsilon_2) = 0\,,$$
$$P\left(\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3}\,, \qquad \mathrm{Var}(\varepsilon_1) = \mathrm{Var}(\varepsilon_2) = 1\,,$$
$$P\left(\varepsilon_1 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3}\,, \qquad \mathrm{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0\,.$$

---

[46] Ld. Hua He (1990).

$$S_{k+1,1}^n = \begin{cases} S_{k1}^n \left(1 + \frac{\mu_1}{n} + \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\ S_{k1}^n \left(1 + \frac{\mu_1}{n}\right) \\ S_{k1}^n \left(1 + \frac{\mu_1}{n} - \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \tag{75}$$

$$S_{k+1,2}^n = \begin{cases} S_{k2}^n \left(1 + \frac{\mu_2}{n} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}} \left[\rho \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-\rho^2} \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) \\ S_{k2}^n \left(1 + \frac{\mu_2}{n} - \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}} \sqrt{1-\rho^2} \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\ S_{k2}^n \left(1 + \frac{\mu_2}{n} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}} \left[-\rho \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-\rho^2} \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) \end{cases} \tag{76}$$

ahol az S_{kj}^n a j-edik termék árfolyama a k-adik lépésben, feltéve, hogy n részre osztjuk az idő egységét. A többfaktoros modellek azért fontosak a kamatláb-alakulás modellezésében, mert az egyfaktoros modellek esetében a kamatlábak mindig ugyanabba az irányba mozdulnak el minden lejáratra, még ha nem is azonos mértékben.

A volatilitás és a korreláció kereskedése

Két termék közötti korreláció kereskedése azt jelenti, hogy olyan portfóliót alakítunk ki, amelynek értéke függ az adott korrelációs együtthatótól, és a portfólió összetételével biztosítjuk, hogy a többi változó[47] (árfolyam, kamatláb, volatilitás) szerinti érzékenység nulla legyen. Ekkor, ha a portfólió értéke nő a korreláció együttható növekedésével, és úgy gondoljuk, hogy a korreláció együttható tényleges értéke nagyobb, mint amit a származtatott termék értéke tükröz, akkor az adott portfólióból long, ellenkező esetben short pozíciót kell felvenni. Elég általános vélekedés, hogy a rövid távú árfolyam-alakulásban a korrelációs együtthatók meglehetősen instabilak.

A volatilitásra teljesen hasonló módon lehet ,,fogadásokat kötni". A piaci szóhasználattal: megvettük a volatilitást, ha olyan portfóliónk van, amelynek a volatilitás szerinti deriváltja pozitív.

Az opciók talán legnagyobb haszna, hogy az opciós piacok árai alapján visszaszámíthatók az opciós díjakban megbúvó volatilitások.[48] A piac jövőbeni bizonytalanságával kapcsolatos várakozások így jól mérhetők. Különböző időtávokra vonatkozó átlagos volatilitásokból jövőbeni részidőszakokra vonatkozó *forward volatilitások* számíthatók.

A volatilitások szerepét illetően emlékeztetünk a HJM modell üzenetére: a jövőbeni kamatlábváltozások várható értékét teljes mértékben meghatározza kamatláb volatilitások lejárati szerkezete. Ebből a szempontból egyáltalán

[47] Kivéve az idő változót.

[48] Az opciós piac információinak ilyen felhasználása R. Rendlemann nevéhez fűződik.

nem egy ártatlan jelenség a forint kamatláb elmúlt 2 évben drámaian megnövekedett volatilitása.

Az opcióárazásból kinövő kamatláb modellek irányították rá a figyelmet, hogy nemcsak a kamatlábak szintjének van hatása a gazdaság működésére, hanem annak is komoly és számszerűsíthető hatása van a kamatlábak jövőben várható szintjére, hogy miként változik a kamatlábak ingadozásainak a mértéke.

Irodalom

1. Avellaneda–Laurence: *Quantitative modeling of derivative securities.* Chapman, 2000.
2. Baxter-Rennie: *Pénzügyi kalkulus.* Typotech, 2002.
3. Berlinger-Walter: Faktormodellek az értékpapírpiacokon. *Bankszemle*, 1999.
4. Björk: *Arbitrage theory in continuous time.* Oxford University Press, 1998.
5. Briys-Bellalah-Mai-de Verenne: *Options, futures and exotic derivatives* Wiley, 1998.
6. Clewlow-Strickland: *Implementing derivatives models.* Wiley, 1998.
7. Elliott-Kopp: *Pénzpiacok matematikája.* Typotex, 2000.
8. Heath-Jarrow-Morton: Bond pricing and term strucuture of interest rates. *Econometrica*, 60 (1992))
9. Hua He: Convergence from discrete to continuous time contingent claims prices, *The Review of Financial Studies*, 3, 1990, 523–546.
10. Hull: *Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek*, Panem-Prentice Hall, 1999.
11. Jarrow-Turnbull: *Derivative securities.* South Western College, 2000.
12. Makara T.: A hozamgörbe becslése spline módszerrel (in: *Bankról, pénzről, tőzsdéről*). Bankárképző, 1998.
13. Medvegyev P.: A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben, *Közgazdasági Szemle*, 2002. júl.-aug.
14. Medvegyev P.: *Valószínűségszámítás.* Aula, Bp. 2002.
15. Mikolasek A.: A kamatlábkockázat mérése és kezelése (in: *Bankról, pénzről, tőzsdéről*). Bankárképző, 1998.
16. Rebonato: *Interest-rate option models.* Wiley, 1996.
17. Száz: *Tőzsdei opciók.* Tanszék, Bp. 1999.
18. Varga J.: Pénz- és tőkepiaci idősorok sztochasztikus volatilitás modelljei. *Szigma*, 2001.
19. Varga J: *Sztochasztikus módszerek a finanszírozási elméletben.* PTE, Pécs, 2000.
20. Wilmott: *Derivatives.* Wiley, 1998.
21. Wilmott-Howison-Dewynne: *The mathematics of financial derivatives.* Cambridge University Press, 1995.
22. Zsembery L: Volatilitás kereskedés az opciós piacokon. *Bankszemle*, 1999.

23. Zsembery L:: A volatilitás előrejelzés és a visszaszámított modellek. *Közgazdasági Szemle*, 2003. június.
24. Zsembery L: Volatilitás kereskedés volatilitásra szóló származtatott termékek felhasználásával. *Hitelintézeti Szemle*, 2003. december.)

INTEREST RATE MODELS AND THE PRICE PROCESSES OF FINANCIAL DERIVATIVES

This review article compares the development of financial theory within and outside Hungary in the last three decades starting with the Black-Scholes revolution. Problems like the term structure of interest rate volatilities which is in the focus of many research internationally has not received the proper attention among the Hungarian economists. The article gives an overview of no-arbitrage pricing, the partial differential equation approach and the related numerical techniques, like the lattice methods in pricing financial derivatives. The relevant concepts of the martingal approach are overviewed. There is a special focus on the HJM framework of the interest rate development. The idea that the volatility and the correlation can be traded is a new horizon to the Hungarian capital market.